潮流准调和分析方法探讨

刘鑫仓[1], 袁道伟[1], 王晓峰[3*], 张永强[2], 董祥科[1], 王永康[1]

（1. 国家海洋环境监测中心, 辽宁 大连 116023；
2. 自然资源部 第一海洋研究所, 山东 青岛 266061；
3. 山东电力工程咨询院有限公司, 山东 济南 250013）

摘　要：潮汐和潮流的调和分析是海洋水文资料分析的基础方法，通常采用最小二乘法处理调和分析过程产生的矛盾方程，但以往受到计算能力和程序语言的限制，导致矛盾方程的求解方法较为复杂，不利于海洋科技工作者掌握和使用。本文以短周期观测潮流数据的准调和分析方法为例，探讨了潮流准调和分析方法中矛盾方程的解法，对以往的正规方程解法进行了推导和说明，同时，提出了更为简洁的矩阵表示方法，对 2 种方法的优劣及特点进行了分析，认为矩阵方法更适合程序化在计算机上进行分析计算；在此基础上采用江苏大丰附近海域观测的三周日潮流数据作为实例进行计算，运用矩阵解法求出其调和常数、椭圆要素以及余流，并对同时期潮流数据进行了预报，预报结果能很好地吻合原数据。

关键词：准调和分析；潮流；最小二乘法；矛盾方程

中图分类号：P731.1　　**文献标志码：**A　　**文章编号：**1002-3682(2023)01-0088-11

doi: 10.12362/j.issn.1002-3682.20220302001

引用格式：刘鑫仓, 袁道伟, 王晓峰, 等. 潮流准调和分析方法探讨[J]. 海岸工程, 2023, 42(1)：88-98. LIU X C, YUAN D W, WANG X F, et al. Discussion on the method for tidal current quasi-harmonic analysis[J]. Coastal Engineering, 2023, 42(1)：88-98.

潮流是由日月引力所引起的海水周期性水平运动，由于日月和地球相对位置变化具有周期性，因此潮流体现出明显的周期性特点，在滨浅海区域，潮流是最普遍的自然现象之一。在海岸带进行海洋工程和海岸工程设计建设时，潮流是重要的水文要素，近岸海域实测得到的海流按照是否具有周期性可以分为潮流和非周期性余流两部分，余流是由气象、地形、地球自转等非线性因素所引起的非周期性海流，其对于海洋污染调查、海洋环境研究具有重要意义。

在对观测的海流进行分析时，基于潮流具有周期性这样一个事实，认为潮流是由有限个不同振幅波的叠加，每一部分就称之为一个分潮，余下的非周期部分就是余流，这是潮流调和分析的基本思路。但是在实际的潮流观测过程中，因为经费、气象、观测手段等各种原因，难以获得高精度长时间的测流资料，因此在对短期实测的海流资料进行分析处理时，通常将角速度相近的一系列分潮合并为一个分潮来进行分析，称之为准调和分潮，这种方法称之为准调和分析，将海流分解为 O_1、K_1、M_2、S_2、M_4 和 MS_4 六个分潮（事实上是 6 个分潮族），根据各个分潮的振幅和迟角，就可以计算出工程上比较关心的观测海域的潮流椭圆要素等水文参数。

准调和分析作为一项基础性方法广泛应用于处理短周期观测的海流数据[1-7]，并形成了相应规范[8-9]，但是在对观测数据进行准调和分析，应用最小二乘法处理矛盾方程时，按照误差量最小的原则，对各个未知数求偏导数进行求解的正规方程解法较为复杂，不利于海洋科学工作者熟练掌

收稿日期：2022-03-02

作者简介：刘鑫仓（1993—），男，助理工程师，硕士，主要从事海洋生态修复方面研究. E-mail：xcliu@nmemc.org.cn

***通信作者：**王晓峰（1984—），男，高级工程师，主要从事海洋工程水文方面研究. E-mail：wangxiaofeng@sdepci.com

（王佳实　编辑）

握，也不利于运用当前程序语言将其程序化，因此本文在说明准调和分析方法的同时，将以往的正规方程解法采用矩阵语言进行表示，将繁琐的求偏导过程简化为矩阵运算，以适应现在的程序语言，方便海洋科学工作者掌握；并以实测的海流数据为实例进行了计算，运用矩阵方法求出调和常数、椭圆要素和余流，并对同时期潮流进行预报，结果表明各观测日内计算值和实测值符合良好。

1　基本方程

1.1　潮流分解

在进行实测海流资料分析时，因为矢量不方便处理，因此将实测的流速、流向数据按照直角坐标系分解为北、东分量：

$$\begin{cases} U(i,j) = W(i,j)\cos\theta(i,j) \\ V(i,j) = W(i,j)\sin\theta(i,j) \end{cases}, \tag{1}$$

式中：$W(i,j)$、$\theta(i,j)$分别为第 i 次（i=1, 2, ⋯, $S1$）周日观测时的第 j 个 (j=1, 2, ⋯, $n(i)$) 流速、流向数据；$U(i,j)$、$V(i,j)$分别为第 i 次周日观测时第 j 个数据的北分量、东分量数据。

按照前文内容，潮流可以表示为多项分潮流之和：

$$\begin{cases} U = U_0 + \sum_c f_c U_c \cos\left[\sigma_c t + (V_0+u)_c - \xi_c\right] \\ V = V_0 + \sum_c f_c V_c \cos\left[\sigma_c t + (V_0+u)_c - \eta_c\right] \end{cases}, \tag{2}$$

式（2）中：下标 c 代表O_1、K_1、M_2、S_2、M_4和MS_4各分潮；U_c和ξ_c、V_c和η_c分别为各分潮潮流北、东方向的调和常数；f_c和$(V_0+u)_c$为各分潮的天文参数，都是时间的函数；σ_c为各分潮的角速度；t 为时间。

1.2　天文参数计算

观测日 00:00 天文海区参数$\widetilde{b_k}$（k=1, 2, ⋯, 6）按照式（3）～（8）计算：

$$\widetilde{b_1} = \widetilde{a_1} + \widetilde{a_3}\Delta H_1\cos\Delta g_1 - \widetilde{a_4}\Delta H_1\sin\Delta g_1, \tag{3}$$

$$\widetilde{b_2} = \widetilde{a_2} + \widetilde{a_3}\Delta H_1\sin\Delta g_1 + \widetilde{a_4}\Delta H_1\cos\Delta g_1, \tag{4}$$

$$\widetilde{b_3} = \widetilde{a_5} + \widetilde{a_7}\Delta H_2\cos\Delta g_2 - \widetilde{a_8}\Delta H_2\sin\Delta g_2, \tag{5}$$

$$\widetilde{b_4} = \widetilde{a_6} + \widetilde{a_7}\Delta H_2\sin\Delta g_2 + \widetilde{a_8}\Delta H_2\cos\Delta g_2, \tag{6}$$

$$\widetilde{b_5} = \widetilde{a_9} + a_{11}\Delta H_4\cos\Delta g_4 - \widetilde{a_{12}}\Delta H_4\sin\Delta g_4, \tag{7}$$

$$\widetilde{b_6} = \widetilde{a_{10}} + \widetilde{a_{11}}\Delta H_2 sin\Delta g_4 + \widetilde{a_{12}}\Delta H_4\cos\Delta g_4, \tag{8}$$

式中：$\widetilde{a_i}$为天文变量（i=1, 2, ⋯, 12），具体计算过程见附录 A；ΔH_1、ΔH_2、ΔH_4与Δg_1、Δg_2、Δg_4分别为观测点附近已知测站的振幅和迟角的差比数。

各观测时刻对应的天文海区参数由式（9）对 00:00 的天文参数采用《船用潮汐、潮流图表编制方法》[8] 的插值公式进行插值计算得到：

$$\widetilde{b_k}^{(i,j)} = \widetilde{b_k}^{(i)}(0) + \frac{\widetilde{b_k}^{(i)}(24) - \widetilde{b_k}^{(i)}(0)}{24} t^{(i,j)} + \frac{\widetilde{b_k}^{(i)}(48) - \widetilde{b_k}^{(i)}(0) - 2\widetilde{b_k}^{(i)}(24)}{1\,152} t^{(i,j)}\left(t^{(i,j)} - 24\right), \tag{9}$$

式中：$\widetilde{b_k}^{(i,j)}$为第 i 次周日观测第 j 个时刻对应的天文参数（k=1, 2, ⋯, 6）；$\widetilde{b_k}^{(i)}(0)$为第 i 次周日观测 00:00 的天文海区参数；$\widetilde{b_k}^{(i)}(24)$为第 i 次周日观测第 2 日 00:00 的天文海区参数；$\widetilde{b_k}^{(i)}(48)$为第 i 次周日观测第 3 日 00:00 的天文海区参数；$t^{(i,j)}$为时间序数。

根据$\widetilde{b_k}^{(i,j)}$计算出矛盾方程各系数$b_k^{(i,j)}$的值：

$$\begin{cases} b_k^{(i,j)} = \widetilde{b_k}^{(i,j)} \cos\left(\frac{\pi}{ak} t^{(i,j)}\right) + \widetilde{b_{k+1}}^{(i,j)} \sin\left(\frac{\pi}{ak} t^{(i,j)}\right) & (k\text{为奇数}) \\ b_k^{(i,j)} = \widetilde{b_{k-1}}^{(i,j)} \sin\left(\frac{\pi}{ak} t^{(i,j)}\right) - \widetilde{b_k}^{(i,j)} \cos\left(\frac{\pi}{ak} t^{(i,j)}\right) & (k\text{为偶数}) \end{cases}, \tag{10}$$

式中：ak 为系数，由合并后各分潮的角速度决定。

1.3 建立矛盾方程

求出大潮、中潮和小潮各次周日观测时刻的天文海区参数，并根据式(2)列出待求方程组。因为各次观测时间间隔较长，受气象、海流季节性变化等因素影响，将各次观测期间余流设置为不同的常量X_{6+i}和Y_{6+i}：

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{6} b_k^{(i,j)} X_k + X_{6+i} = U_{(i,j)} \\ \sum_{k=1}^{6} b_k^{(i,j)} Y_k + Y_{6+i} = V_{(i,j)} \end{cases}。 \tag{11}$$

式(11)为准调和分析方法的矛盾方程，只要求得此方程的解，潮流的准调和常数和椭圆要素就很容易求得，但按照线性代数理论，在方程个数多于未知数个数的情况下，方程组往往无解，因此称之为矛盾方程组。

2 矛盾方程求解

2.1 经典解法

由于式(11)(矛盾方程组)往往没有满足条件的精确解，因此只能寻求近似解，按照最小二乘法误差量最小的原则，定义误差函数σ^2，当其取得最小值时的解为近似解：

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^{S1} \sum_{j=1}^{n(i)} \left[U_{(i,j)} - \left(\sum_{k=1}^{6} b_k^{(i,j)} X_k + X_{6+i} \right) \right]^2, \tag{12}$$

式中：$n(i)$ 为第 i 次周日观测资料的组数；$S1$ 为潮流周日观测的次数，则求解矛盾方程转化为求σ^2的最小值，以往调和分析算法是按照多元函数求σ^2极小值的方法，将矛盾方程转化为正规方程，具体如下：

$$\begin{cases} \frac{\partial(\sigma^2)}{\partial X_1} = \sum_{i=1}^{S1} \sum_{j=1}^{n(i)} \left\{ -2b_1^{(i,j)} \left[U_{(i,j)} - \left(\sum_{k=1}^{6} b_k^{(i,j)} X_k + X_{6+i} \right) \right] \right\} = 0 \\ \qquad \vdots \\ \frac{\partial(\sigma^2)}{\partial X_6} = \sum_{i=1}^{S1} \sum_{j=1}^{n(i)} \left\{ -2b_6^{(i,j)} \left[U_{(i,j)} - \left(\sum_{k=1}^{6} b_k^{(i,j)} X_k + X_{6+i} \right) \right] \right\} = 0 \\ \qquad \vdots \\ \frac{\partial(\sigma^2)}{\partial X_{6+i}} = \sum_{i=1}^{S1} \sum_{j=1}^{n(i)} \left\{ -2 \left[U_{(i,j)} - \left(\sum_{k=1}^{6} b_k^{(i,j)} X_k + X_{6+i} \right) \right] \right\} = 0 \end{cases}。 \tag{13}$$

上式为误差函数σ^2的各阶偏导数，当各阶偏导数为0时，误差函数σ^2取得极值。σ^2的二阶偏导数为

$$\frac{\partial^2(\sigma^2)}{\partial X_k^2} = \sum_{i=1}^{S1} \sum_{j=1}^{n(i)} 2b_k^{(i,j)} > 0, \tag{14}$$

在式(14)的X_k中，k=1～(6+i)。式(14)中各变量的二阶偏导数恒正，根据多元函数极值定理，在一阶偏导数均为0时式(13)的误差函数σ^2取得最小值，方程组(13)的解即为矛盾方程的最优近似解。

将式(13)采用矩阵表示：令$\sum_{i=1}^{S1}\sum_{j=1}^{n(i)} b_1^{(i,j)} b_2^{(i,j)} = B_1 B_2$，$\sum_{i=1}^{S1}\sum_{j=1}^{n(i)} b_1^{(i,j)} b_3^{(i,j)} = B_1 B_3$，…，$\sum_{i=1}^{S1}\sum_{j=1}^{n(i)} b_1^{(i,j)} b_k^{(i,j)} =$

B_1B_k，$\sum_{i=1}^{S1}\sum_{j=1}^{n(i)} b_1{}^{(i,j)}U_{(i,j)} = B_1U$，则式（13）可写为

$$\begin{bmatrix} B_1B_1 & B_1B_2 & B_1B_3 & B_1B_4 & B_1B_5 & B_1B_6 & B_1 & B_1 & B_1\cdots \\ & & & & \vdots & & & & \\ B_6B_1 & B_6B_2 & B_6B_3 & B_6B_4 & B_6B_5 & B_6B_6 & B_6 & B_6 & B_6\cdots \\ & & & & \vdots & & & & \\ B_1 & B_2 & B_3 & B_4 & B_5 & B_6 & 1 & 1 & 1\cdots \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_6 \\ \vdots \\ X_{6+i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_1U \\ \vdots \\ B_6U \\ \vdots \\ U \end{bmatrix}。 \tag{15}$$

上述方阵具有主对角线优势，按照一般求解方程组的方法即可求解。采用最小二乘法估计的正规方程求解矛盾方程是进行准调和分析的经典方法，在计算机语言发展的早期很适合程序化计算，但是因为解法较为复杂，不利于海洋科学工作者掌握。

2.2　矩阵解法

获得观测期间的天文海区参数后，式（11）可以写成矩阵形式：

$$\begin{bmatrix} b_1^{(1,1)} & b_2^{(1,1)} & b_3^{(1,1)} & b_4^{(1,1)} & b_5^{(1,1)} & b_6^{(1,1)} & 1 & 0 & 0\cdots \\ & & & & \vdots & & & & \\ b_1^{(2,1)} & b_2^{(2,1)} & b_3^{(2,1)} & b_4^{(2,1)} & b_5^{(2,1)} & b_6^{(2,1)} & 0 & 1 & 0\cdots \\ & & & & \vdots & & & & \\ b_1^{(i,j)} & b_2^{(i,j)} & b_3^{(i,j)} & b_4^{(i,j)} & b_5^{(i,j)} & b_6^{(i,j)} & \cdots 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_6 \\ \vdots \\ X_{6+i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_{(1,1)} \\ \vdots \\ U_{(2,1)} \\ \vdots \\ U_{(i,j)} \end{bmatrix}, \tag{16}$$

且可以简单记为

$$\boldsymbol{AX} = b, \tag{17}$$

式中：$\boldsymbol{A}$ 为天文参数的系数矩阵；$\boldsymbol{X}$ 为方程待求解；b 为观测的海流数据。式（17）的矩阵方程在数学上的最小二乘解可以用矩阵语言表示为

$$\boldsymbol{X} = \left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\right)^{-1}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}b。 \tag{18}$$

根据式（18）可简单求解矛盾方程，用一般的程序语言（Python、C、VB 等）两三行就可以实现，相比于正规方程的方法，以下为使用 Python 编写的求解程序:

```
from numpy import*
def solve_equation(A,b) :
X = ((A.transpose()*A).I)*A.transpose()*b
return(X)
```

在求出矛盾方程解之后，计算观测的方差和误差系数（μ）（方法详见附录 B 和附录 C），当某组观测数据满足判别条件（具体条件详见附录 C4）时，用预报值（详见附录 C1）代替观测值重新进行矛盾方程求解，重新计算调和常数以及椭圆要素。

3　实例验证

3.1　潮流分析

本文选用自然资源部第一海洋研究所在江苏大丰附近海域观测的海流数据作为实例对矩阵解法进行检验，观测时间为 2014 年 8 月 10 日至 8 月 22 日，包含大、中、小潮三个潮期，每个潮期观测 28 h。海流观测采用美国 RDI 公司生产的 ADCP 海流剖面仪，ADCP 海流剖面仪采用固定安装，测量时间间隔为 10 min。大、中、小潮期流速流向变化如图 1、图 2 所示。对实测的大、中、小潮流速流向数据进行整理之后，运用本文所述方法进行计算，计算结果见表 1 和表 2。

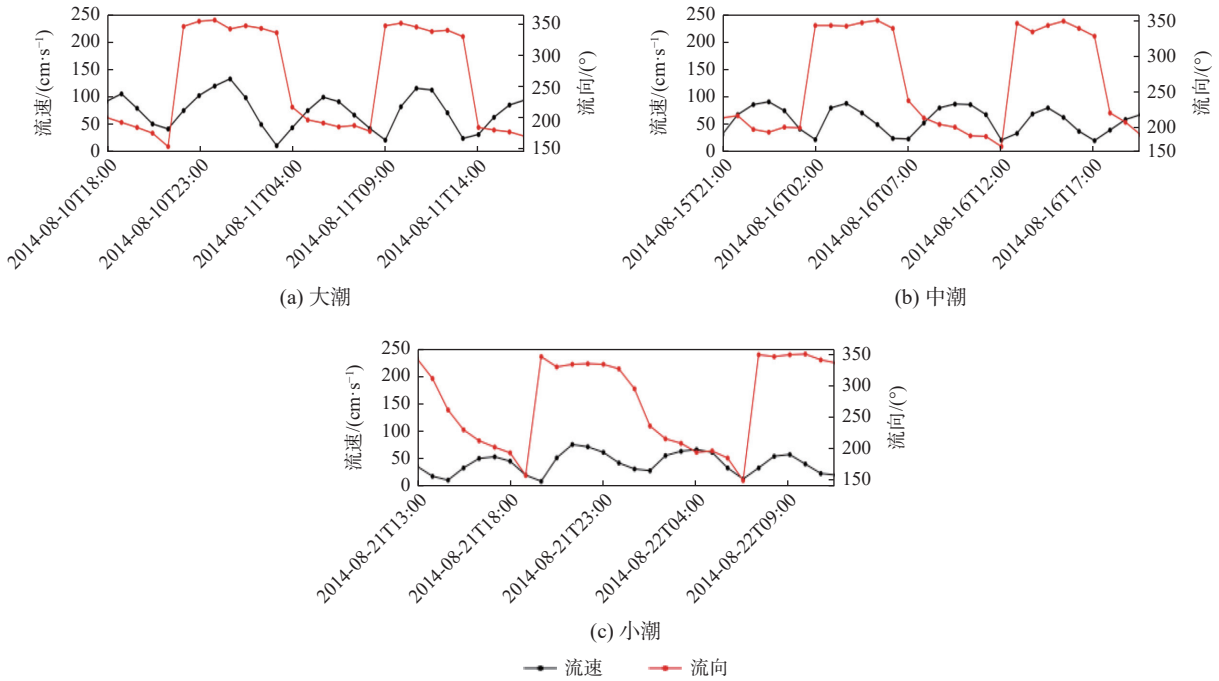


图 1 大、中、小潮期实测海流过程曲线

Fig. 1 Process curves of ocean currents measured during the periods of spring , medium and neap

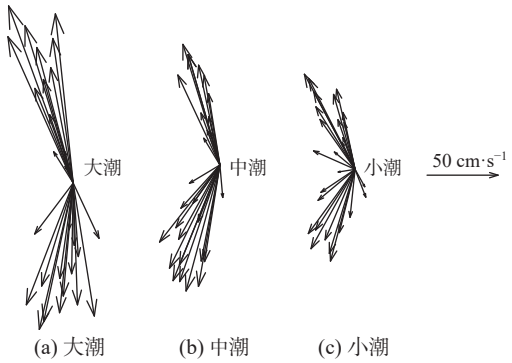


图 2 大、中、小潮期实测海流矢量图

Fig. 2 Vector plots of ocean currents measured during the periods of spring, medium and neap tides

表 1 准调和分析结果

Table 1 Results of quasi-harmonic analysis

分 潮	调和常数				椭圆要素				
	北分量		东分量		最大速度/(cm·s⁻¹)	方向/(°)	时刻/h	最小速度/(cm·s⁻¹)	旋转率
	迟角/(°)	振幅/(cm·s⁻¹)	迟角/(°)	振幅/(cm·s⁻¹)					
O_1	137.7	5.9	45.2	2.7	5.9	358.6	9.9	2.6	0.45
K_1	195.7	7.6	103.2	3.4	7.6	178.6	1.1	3.4	0.45
M_2	50.2	69.4	289.1	5.7	69.4	357.6	1.7	4.9	0.07
S_2	98.2	24.3	337.1	2.0	24.3	357.6	3.3	1.7	0.07
M_4	41.1	4.2	251.6	4.6	6.0	311.4	1.0	1.6	0.27
MS_4	89.1	2.9	299.6	3.2	4.2	311.4	1.8	1.1	0.27

表 2　余流和潮型判别数

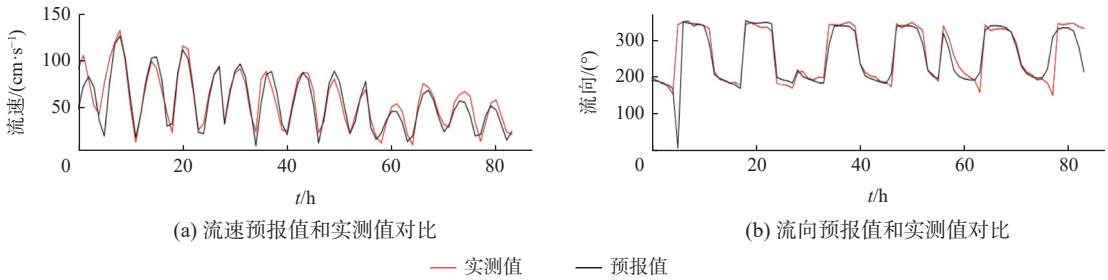
Table 2　Discrimination numbers of the residual current and the tide type

项　目	大潮余流		中潮余流		小潮余流		潮型判别数
	流速/(cm·s^{-1})	流向/(°)	流速/(cm·s^{-1})	流向/(°)	流速/(cm·s^{-1})	流向/(°)	
数值	14.0	293.2	19.7	259.2	17.7	24.8	0.2

观测数据整体流速较大，最大速度超过 100 cm/s，大、中、小潮期间流速逐渐减小；由流矢量图（图 2）可见，各潮期数据方向分布相似，主要呈 N—E 方向分布的往复流。由计算结果（表 1 和表 2）可知，潮流判别数 $F=(W_{O_1}+W_{K_1})/W_{M_2}<0.5$，潮流性质为规则半日潮流[10]；全日分潮（$O_1$、$K_1$）和半日分潮（$M_2$、$S_2$）的北分量振幅大于东分量振幅，浅水分潮（$M_4$、$MS_4$）则相反，其东分量振幅大于北分量振幅。各分潮旋转率较小，约 0～0.50，潮流运动形式主要为往复流；大潮期间余流流速为 14.0 cm/s，流向为 293.2°，中潮期余流流速为 19.7 cm/s，流向为 259.2°，小潮期间余流流速为 17.7 cm/s，流向为 24.8°。

3.2　潮流预报

求得调和常数、椭圆参数及余流后，再次预报同时期潮流数据，预报值和观测值对比见图 3。由图 3 可见，预报值和实测值符合良好，除少量数据之外，流速、流向的波峰、波谷大部分吻合，具体数值也相差较小，能够反映真实的潮流特征。



(a) 流速预报值和实测值对比　　(b) 流向预报值和实测值对比

图 3　准调和分析预报值和实测值对比

Fig. 3　Comparison between predicted and measured values obtained by quasi-harmonic analysis

4　结　论

本文阐述了处理短期潮流观测数据的准调和分析方法，总结了过去在潮汐和潮流调和分析中矛盾方程求解的方法，对正规方程的由来进行了推导，并在此基础上提出了矛盾方程求解的矩阵表示，并给出了求解的具体程序。针对该方法，以实测的 3 周日海流数据作为实例进行分析计算和再预报，具体结论如下。

1）最小二乘法矛盾方程的矩阵解法适用于当前的计算机发展水平和程序的特点，易于掌握。

2）正规方程解法和矩阵方法两者在数学上是等价的，只是表现形式不同。

3）对规则半日潮海区三周日观测的海流数据进行分析预报，结果表明本文提出的方法简洁可靠。

附录A 天文参数计算[8]

A1 计算S、h'、P、N'、P'

$$S = 4.834\,99 + 2.258\,190\,9(y - 1\,900) + 0.229\,971\,6(D_y + D_T + D_1 - 2),$$

$$h' = 4.890\,23 - 0.004\,166\,4(y - 1\,900) + 0.017\,202\,8(D_y + D_T + D_1 - 2),$$

$$P = 5.836\,12 + 0.709\,694\,3(y - 1\,900) + 0.001\,944\,3(D_y + D_T + D_1 - 2),$$

$$N' = 4.523\,14 - 0.337\,340\,4(y - 1\,900) - 0.000\,924\,2(D_y + D_T + D_1 - 2),$$

$$P' = 4.908\,23 + 0.000\,299\,3(y - 1\,900) - 0.000\,000\,9(D_y + D_T + D_1 - 2),$$

式中：S为月球平均经度；h'为太阳平均经度；P为月球近地点平均经度；N'为白道升交点经度；P'为太阳近地点平均经度；D_y为从y年1月1日以后经过的日数，y为年份；D_1为1900年至y年的闰年数；D_T为天文变量日期指标（D_T=0表示计算观测日期00:00的值，D_T=1表示计算观测日期第2天00:00的值，D_T=2表示计算观测日期第3天00:00的值）。

A2 计算λ_s、C_s/r_s、λ、C/r、I、v和ξ

$$\lambda_s = h' + 0.033\,5\sin(h' - P') + 0.000\,4\sin2(h' - P'),$$

$$\frac{C_s}{r_s} = 1 + 0.016\,8\cos(h' - P') + 0.000\,3\cos2(h' - P'),$$

$$\lambda = S + 0.109\,8\sin(S - P) + 0.003\,8\sin2(S - P) + 0.020\,4\sin(S - 2h' + P) + 0.010\,8\sin2(S - h'),$$

$$\frac{C}{r} = 1 + 0.054\,8\cos(S - P) + 0.003\,0\cos2(S - P) + 0.009\,3\cos(S - 2h' + P) + 0.007\,8\cos2(S - h'),$$

$$I = \cos^{-1}(0.913\,69 - 0.035\,69\cos N'),$$

$$v = \sin^{-1}\frac{0.089\,69\sin N'}{\sin I},$$

$$\xi = \sin^{-1}[(0.917\,39 - 0.017\,88\cos N')\sin v]。$$

A3 计算准调和分潮的D'和d'

$$D'_{O_1} = 2.651\,8\left(\frac{C}{r}\right)^3 \sin I\cos^2\frac{I}{2},$$

$$D'_{K_1,a} = 0.942\,5\left(\frac{C}{r}\right)^3 \sin(2I),$$

$$D'_{K_1,b} = 1.885\,0\left(\frac{C}{r}\right)^3 \sin I\sin^2\frac{I}{2},$$

$$D'_{K_1,c} = 0.331\,0\left(\frac{C_s}{r_s}\right)^3,$$

$$D'_{K_1,d} = 0.316\,7\left(\frac{C_s}{r_s}\right)^3,$$

$$D'_{K_1,e} = 0.014\,3\left(\frac{C_s}{r_s}\right)^3,$$

$$D'_{M_2} = 1.100\,7\left(\frac{C}{r}\right)^3 \cos^4\frac{I}{2},$$

$$D'_{S_2,a} = 1.182\,9\left(\frac{C}{r}\right)^3 \sin^2 I,$$

$$D'_{S_2,b} = 1.100\,7\left(\frac{C_s}{r_s}\right)^3,$$

$$D'_{S_2,c} = 0.086\,2\left(\frac{C_s}{r_s}\right)^3,$$

$$D'_{S_2,d} = 0.101,$$

$$d'_{O_1} = 2\lambda - h' + v - 2\xi + \frac{\pi}{2},$$

$$d'_{K_1,a} = -h' + v - \frac{\pi}{2},$$

$$d'_{K_1,b} = -2\lambda - h' + v + 2\xi\frac{\pi}{2},$$

$$d'_{K_1,c} = 2\lambda_s - h' + \frac{\pi}{2},$$

$$d'_{K_1,d} = -h' - \frac{\pi}{2},$$

$$d'_{K_1,e} = -2\lambda_s - h' - \frac{\pi}{2},$$

$$d'_{M_2} = 2\lambda - 2h' + 2v - 2\xi,$$

$$d'_{S_2,a} = -2h' + 2v,$$

$$d'_{S_2,b} = 2\lambda_s - 2h',$$

$$d'_{S_2,c} = -2h',$$

$$d'_{S_2,d} = 1.955。$$

A4　计算各分潮的天文变量值

$$\widetilde{a_1} = 0.632\,8D'_{O_1}\cos d'_{O_1} - 0.774\,2D'_{O_1}\sin d'_{O_1},$$

$$\widetilde{a_2} = 0.774\,2D'_{O_1}\cos d'_{O_1} + 0.632\,8D'_{O_1}\sin d'_{O_1},$$

$$\widetilde{a_3} = 0.999\,4\sum\nolimits_{p=a,b,c,d,e} D'_{K_1,p}\cos d'_{K_1,p} + 0.034\,4\sum\nolimits_{p=a,b,c,d,e} D'_{K_1,p}\sin d'_{K_1,p},$$

$$\widetilde{a_4} = -0.034\,4\sum\nolimits_{p=a,b,c,d,e} D'_{K_1,p}\cos d'_{K_1,p} + 0.999\,4\sum\nolimits_{p=a,b,c,d,e} D'_{K_1,p}\sin d'_{K_1,p},$$

$$\widetilde{a_5} = 0.659\,1D'_{M_2}\cos d'_{M_2} - 0.752\,1D'_{M_2}\sin d'_{M_2},$$

$$\widetilde{a_6} = 0.752\,1D'_{M_2}\cos d'_{M_2} + 0.695\,1D'_{M_2}\sin d'_{M_2},$$

$$\widetilde{a_7} = 1.034\sum\nolimits_{p=a,b,c,d} D'_{S_2,p}\cos(d'_{S_2,p} - 0.098),$$

$$\widetilde{a_8} = 1.034\sum\nolimits_{p=a,b,c,d} D'_{S_2,p}\sin(d'_{S_2,p} - 0.098),$$

$$\widetilde{a_9} = a_5{}^2 - a_6{}^2,$$

$$\widetilde{a_{10}} = 2a_5a_6,$$

$$\widetilde{a_{11}} = a_5a_7 - a_6a_8 + 0.104\,7\left(a_7{}^2 - a_8{}^2\right) - 0.134\,(2a_7a_8),$$

$$\widetilde{a_{12}} = a_5a_8 + a_6a_7 + 0.134\,0\left(a_7{}^2 - a_8{}^2\right) + 0.104\,7\,(2a_7a_8)。$$

附录 B 计算调和常数[8]

$$\begin{cases} X_{O_1} = X_1 \\ X_{O_1}' = X_2 \\ X_{K_1} = X_1 \Delta H_1 \cos \Delta g_1 - X_2 \Delta H_1 \sin \Delta g_1 \\ X_{K_1}' = X_2 \Delta H_1 \cos \Delta g_1 + X_1 \Delta H_1 \sin \Delta g_1 \\ X_{M_2} = X_3 \\ X_{M_2}' = X_4 \\ X_{S_2} = X_3 \Delta H_2 \cos \Delta g_2 - X_4 \Delta H_2 \sin \Delta g_2 \\ X_{S_2}' = X_4 \Delta H_2 \cos \Delta g_2 + X_3 \Delta H_2 \sin \Delta g_2 \\ X_{M_4} = X_5 \\ X_{M_4}' = X_6 \\ X_{MS_4} = X_5 \Delta H_4 \cos \Delta g_2 - X_6 \Delta H_4 \sin \Delta g_4 \\ X_{MS_4}' = X_6 \Delta H_4 \cos \Delta g_4 + X_5 \Delta H_4 \sin \Delta g_4 \end{cases},$$

$$U_c = \left[X_c^{\,2} + (X_c')^2 \right]^{\frac{1}{2}},$$

式中 U_c（c=O_1, K_1, M_2, S_2, M_4, MS_4）为各分潮北分量的振幅。

$$\xi_c = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2} & 若 X_c = 0，X_c' \geqslant 0 \\ \dfrac{3\pi}{2} & 若 X_c = 0，X_c' < 0 \\ tg^{-1} \dfrac{X_c'}{X_c} & 若 X_c > 0，X_c' \geqslant 0 \\ tg^{-1} \dfrac{X_c'}{X_c} + \pi & 若 X_c < 0 \\ tg^{-1} \dfrac{X_c'}{X_c} + 2\pi & 若 X_c > 0，X_c' < 0 \end{cases},$$

式中 ξ_c（c=O_1, K_1, M_2, S_2, M_4, MS_4）为各分潮北分量的迟角，东分量和北分量计算方法相同。

附录C 误差判别[8]

C1 用正规方程的解计算各观测时刻的潮流分量

$$\begin{cases} \widehat{U}_{(i,j)} = X_{6+i} + \sum_{k=1}^{6} b_k^{(i,j)} X_k & (i = 1, 2 \cdots\cdots S1) \\ \widehat{V}_{(i,j)} = Y_{6+i} + \sum_{k=1}^{6} b_k^{(i,j)} Y_k & (j = 1, 2 \cdots\cdots n(i)) \end{cases},$$

式中$\widehat{U}_{(i,j)}$和$\widehat{V}_{(i,j)}$为重新预报的第 i 次周日观测时第 j 个数据的北分量、东分量值。

C2 计算方差

$$\sigma_1^{\,2} = \frac{1}{2\sum_{i=1}^{S1} n(i)} \sum_{i=1}^{S1} \sum_{j=1}^{n(i)} \left[\left(U_{(i,j)} - \widehat{U}_{(i,j)} \right)^2 + \left(V_{(i,j)} - \widehat{V}_{(i,j)} \right)^2 \right],$$

式中$\sigma_1^{\,2}$为方差。

C3　计算误差系数

$$\mu^2 = 2.56 + 1.738ln\left[\sum_{i=1}^{S1} n(i)\right] + 0.009\,6ln^2\left[\sum_{i=1}^{S1} n(i)\right],$$

式中μ^2为误差系数。

C4　判别条件

$$\left(U_{(i,j)} - \widehat{U}_{(i,j)}\right)^2 + \left(V_{(i,j)} - \widehat{V}_{(i,j)}\right)^2 \geqslant \mu^2 \sigma_1{}^2。$$

参考文献 (References):

[1] 方国洪, 郑文振, 陈宗镛, 等. 潮汐和潮流的分析和预报[M]. 北京: 海洋出版社, 1986. FANG G H, ZHENG W Z, CHEN Z Y, et al. Analysis and prediction of tides and currents[M]. Beijing: Ocean Press, 1986.

[2] 王长海, 李培. 潮流调和分析的计算程序[J]. 水道港口, 1987(1): 28-35. WANG C H, LI P. Power flow and analysis of the calculation program[J]. Journal of Waterway and Harbor, 1987(1): 28-35.

[3] 丘仲锋, 胡建宇, 陈照章. 台湾浅滩南部二测站多周日海流观测资料的调和分析[J]. 海洋科学, 2002, 26(7): 50-53. QIU Z F, HU J Y, CHEN Z Z. Harmonic analysis on multi-day series current data at two anchored stations in the southern tanwans shoal[J]. Marine Sciences, 2002, 26(7): 50-53.

[4] 王凯, 叶冬. 东海三定点周日海流观测的准调和分析[J]. 海洋科学, 2007, 31(8): 18-25. WANG K, YE D. Quasi-harmonic analysis on one-day series current data at three anchored stations in the East China Sea[J]. Marine Sciences, 2007, 31(8): 18-25.

[5] 郝佳佳, 林鹏飞, 温小虎, 等. 烟墩角海域二测站周日水温及潮流变化特征[J]. 海洋科学, 2012, 36(4): 121-125. HAO J J, LIN P F, WEN X H, et al. One-day current and temperature variations at two anchored stations near Yandunjiao[J]. Marine Sciences, 2012, 36(4): 121-125.

[6] 刘京鹏, 吴建政, 李军, 等. 辽东湾西部海域潮流特征[J]. 海洋地质前沿, 2015, 31(11): 10-17. LIU J P, WU J Z, LI J, et al. Study of tide current characteristics in the wester Liaodong Bay[J]. Marine Geology Frontiers, 2015, 31(11): 10-17.

[7] 庄园, 刘子洲, 翟方国. 北黄海定点连续观测站海流资料分析[J]. 海洋与湖沼, 2017, 48(4): 703-711. ZHUANG Y, LIU Z Z, ZHAI F G. Analysis on continuous current observation in the northern yellow sea[J]. Oceanologia et Limnologia Sinica, 2017, 48(4): 703-711.

[8] 交通运输航测标准化技术委员会. 船用潮汐、潮流图表编制方法: GB/T 13474—92[S]. 北京: 中国标准出版社, 1993. MOT Technical Committee on Standardization of AtoN & Hydrography. The method of editing tidal tables and tidal stream charts for ship: GB/T 13474—92[S]. Beijing: Standards Press of China, 1993.

[9] 国家海洋标准计量中心. 海洋调查规范: 海洋调查资料处理: GB/T 12763.7—1991[S]. 北京: 中国标准出版社, 1991: 128. National Center of Ocean Standards and Metrology. The specification for Oceanographic survey oceanographic survey data processing: GB/T 12763.7—1991[S]. Beijing: Standards Press of China, 1991: 128.

[10] 陈宗镛. 潮汐学[M]. 北京: 科学出版社, 1980. CHEN Z Y. Tidology[M]. Beijing: Science Press, 1980.

Discussion on the Method for Tidal Current Quasi-Harmonic Analysis

LIU Xincang[1], YUAN Daowei[1], WANG Xiaofeng[3], ZHANG Yongqiang[2], DONG Xiangke[1], WANG Yongkang[1]

（1. *National Marine Environment Monitoring Center*, Dalian 116023, China；
2. *First Institute of Oceanology*, *Ministry of Natural Resources*, Qingdao 266100, China；
3. *Shandong Electric Power Engineering Cousulting Institute Co*., *Ltd*., Jinan 250213, China）

Abstract: The harmonic analysis of tides and tidal currents is a basic method for the analysis of ocean hydrological data, and the contradictory equations generated during the harmonic analysis are usually dealt with by means of the least square method. However, due to the limits of computing power and programming language in the past, the solving method of the contradictory equation was made more complicated, which is not good for marine science and technology workers to master and use. By taking the method for quasi-harmonic analysis of tidal current data observed in short period as the example, the solving method of contradiction equation generated during the tidal current quasi-harmonic analysis is discussed, the previous method for the solving of normal equation is deduced and explained and a more concise matrix representation method is put forward. The advantages, disadvantages and characteristics of the two methods are compared, finding that the matrix method is even more suitable for programmatic analysis and calculation on a computer. On this basis, the daily tidal current data of three weeks observed in the sea area near Dafeng of Jiangsu Province are taken as the example for calculation and their harmonic constant, ellipse element and residual current are obtained by using the matrix method. The tidal current data of the same period are also forecasted and the forecasted results can match well with the original data.

Key words: quasi harmonic analysis；tidal current；least squares method；contradictory equation

Received: March 2, 2022